Examen del 27 de mayo de 2020

Cálculo vectorial.

El sistema de vectores deslizantes está constituido por los siguientes vectores:

- $\boldsymbol{a} = d \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j} + 5 \cdot \boldsymbol{k}$ es un vector aplicado en el punto $A(0, 1, -2)$
- $\boldsymbol{b} = 2 \cdot \boldsymbol{i} - 3 \cdot \boldsymbol{j} + 2 \cdot \boldsymbol{k}$ es un vector aplicado en el punto $B(-1, 1, 1)$
- $\boldsymbol{c} = 4 \cdot \boldsymbol{i} - 3 \cdot \boldsymbol{k}$ es un vector aplicado en el punto $C(3, 1, 2)$

Determinar:

1. El valor de la constante d para que el vector resultante del sistema sea $\boldsymbol{R} = 3 \cdot \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k}$ (0.5 puntos).
2. El valor del momento mínimo (1 punto).
3. El punto de intersección del eje central con el plano XOZ (1 punto).
4. Lugar geométrico de los puntos del espacio donde la resultante del sistema y el momento forman un ángulo $3\pi/4$ (1.25 puntos).

Resolución.
La suma de los vectores debe ser igual al vector resultante:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

$$3 \cdot \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k} = (d \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j} + 5 \cdot \boldsymbol{k}) + (2 \cdot \boldsymbol{i} - 3 \cdot \boldsymbol{j} + 2 \cdot \boldsymbol{k}) + (4 \cdot \boldsymbol{i} - 3 \cdot \boldsymbol{k})$$

de donde se obtiene que $d = -3$.
El momento generado por el sistema de vectores en el punto A es:

$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{AB} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{M_A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \cdot \boldsymbol{i} + 33 \cdot \boldsymbol{j} + 3 \cdot \boldsymbol{k}$$

El segundo invariante del sistema se obtiene como el producto escalar entre el momento generado por el sistema de vectores deslizantes en cualquier punto y la resultante:

$$\tau = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M_A} = (3 \cdot \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (9 \cdot \boldsymbol{i} + 33 \cdot \boldsymbol{j} + 3 \cdot \boldsymbol{k}) = 6$$

El momento mínimo será por tanto:

$$\boldsymbol{m} = \lambda \cdot \boldsymbol{R} = \frac{\tau}{|\boldsymbol{R}|^2} \boldsymbol{R} = \frac{3}{13}(3 \cdot \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k})$$

Para calcular el punto de intersección del eje central con el plano XOZ suponemos un punto $E(x, 0, z)$ que pertenece al eje central

$$\boldsymbol{M_E} = \boldsymbol{m} = \boldsymbol{M_A} + \boldsymbol{EA} \wedge \boldsymbol{R}$$

$$\frac{3}{13}(3 \cdot \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k}) = (9 \cdot \boldsymbol{i} + 33 \cdot \boldsymbol{j} + 3 \cdot \boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -x & 1 & -2 - z \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

www.tecnun.es

que conduce a las ecuaciones

$$\frac{9}{13} = 11 - z$$
$$-\frac{3}{13} = 27 - 3 \cdot z + 4 \cdot x$$
$$\frac{12}{13} = x$$

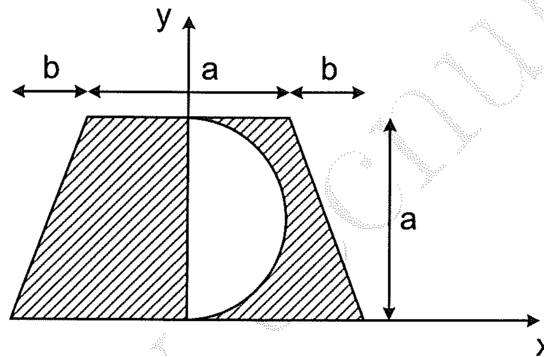
de donde se obtienen las coordenadas del punto de intersección del eje central con el plano XOZ:

$$E\left(\frac{12}{13}, 0, \frac{134}{13}\right)$$

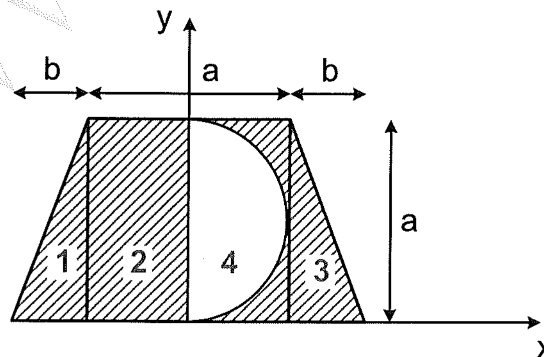
El lugar geométrico solicitado no existe, ya que al ser τ positiva el valor del ángulo entre la resultante del sistema y el momento debe estar comprendido en el intervalo $0 \leq \varphi < \pi/2$.

Geometría de Masas.

Determinar la posición del centro de gravedad de la placa plana rayada homogénea de la figura:



La figura puede descomponerse en los triángulos 1 y 3, situados en los ejes x negativo y x positivo respectivamente, en un cuadrado (2) de lado a y en un semicírculo (4) de radio $a/2$.



La masa correspondiente a cada una de las figuras parciales es:

$$M_1 = M_3 = \rho\frac{ab}{2}$$

$$M_2 = \rho a^2$$

$$M_4 = \rho\frac{\pi a^2}{8}$$

Se sabe que el centro de gravedad de un triángulo puede calcularse sumando las coordenadas de los vértices y dividiendo el resultado entre 3, por tanto:

$$\boldsymbol{OG_1} = -\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\cdot \boldsymbol{i} + \frac{a}{3}\cdot \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{OG_3} = \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\cdot \boldsymbol{i} + \frac{a}{3}\cdot \boldsymbol{j}$$

Por simetría, el cuadrado de lado a tiene su centro de gravedad en la posición:

$$\boldsymbol{OG_2} = \frac{a}{2}\cdot \boldsymbol{j}$$

El semicírculo tiene su centro de gravedad sobre el eje de simetría horizontal, a una altura $a/2$. Para calcular la posición del centro de gravedad en el eje x aplicamos el segundo teorema de Pappus-Guldin:

$$V = 2\pi X_G A$$

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = 2\pi X_G\frac{\pi a^2}{8}$$

de donde

$$X_G = \frac{2a}{3\pi}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{OG_4} = \frac{2a}{3\pi}\cdot \boldsymbol{i} + \frac{a}{2}\cdot \boldsymbol{j}$$

El centro de gravedad de la placa rayada se puede calcular según:

$$M_T\cdot \boldsymbol{OG} = M_1\cdot \boldsymbol{OG_1} + M_2\cdot \boldsymbol{OG_2} + M_3\cdot \boldsymbol{OG_3} - M_4\cdot \boldsymbol{OG_4}$$

de donde:

$$\boldsymbol{OG} = -\frac{2a^2}{3(8b+8a-\pi a)}\cdot \boldsymbol{i} + \frac{16ab+24a^2-3\pi a^2}{6(8b+8a-\pi a)}\cdot \boldsymbol{j}$$

Cinemática y Dinámica.

Un punto material de masa M se mueve sometido a la acción de una fuerza central newtoniana con constante de proporcionalidad k. Cuando el punto se encuentra en la posición $P_0(x_0, y_0)$ referida a unos ejes cartesianos con origen en el foco de la fuerza, su velocidad es $\boldsymbol{v_0} = v_{x0}\cdot \boldsymbol{i} + v_{y0}\cdot \boldsymbol{j}$.

Se sabe que la trayectoria del punto es la elipse

$$r = \frac{A}{B+\cos\varphi}$$

a) Constante de las áreas. La constante de las áreas se calcula como el producto vectorial del vector $\boldsymbol{OP}$ y el vector velocidad, en la posición indicada en el enunciado. Queda $C = x_0\cdot v_{y0} - y_0\cdot v_{xo}$. Dependiendo de los datos del enunciado, puede ser positiva o negativa.

b) Exprese el vector velocidad en una posición genérica como función únicamente de la variable φ. El vector velocidad se obtiene derivando el vector de posición.

Vector de posición:

$$\boldsymbol{OP} = \frac{A}{B + cos\varphi} \cdot \boldsymbol{E_r}$$

Vector velocidad:

$$\boldsymbol{v} = \frac{A \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}}{(B + cos\varphi)^2} \cdot \boldsymbol{E_r} + \frac{A \cdot \dot{\varphi}}{(B + cos\varphi)} \cdot \boldsymbol{E_\varphi}$$

Haciendo uso de la constante de las áreas:

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} = C\left(\frac{B + cos\varphi}{A}\right)^2$$

Sustituyendo, el vector velocidad queda:

$$\boldsymbol{v} = \frac{C}{A}[\sin\varphi \cdot \boldsymbol{E_r} + (B + cos\varphi) \cdot \boldsymbol{E_\varphi}]$$

c) Vector velocidad en la posición de máxima velocidad. Como la fuerza deriva de un potencial, se cumple que: $E = T + V$. La posición de máxima velocidad, por ser la de máxima energía cinética, corresponde al mínimo valor del potencial V. La fuerza newtoniana debe ser atractiva para que el punto esté recorriendo una elipse. Por tanto, el potencial es:

$$V = -\frac{k}{r}$$

El potencial es una función monótona creciente con r. El mínimo valor de V se da en la posición en la que r es mínimo. De manera que hay que calcular ese punto, que es absidal, y por tanto se obtiene con la condición:

$$E = V_f$$

$$E = \frac{MC^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$$

Tomando la menor de las dos soluciones reales de la ecuación:

$$r_{min} = -\frac{k}{2E} - \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 + \frac{MC^2}{2E}}$$

El valor de la energía se puede calcular en el instante inicial, para el que se conocen el módulo de la velocidad $v_o^2 = v_{xo}^2 + v_{yo}^2$ y el valor del potencial real, ya que $r_o^2 = x_o^2 + y_o^2$. Por tanto:

$$E = \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{k}{r_0}$$

Teniendo en cuenta que la posición es absidal, el vector velocidad queda:

$$\boldsymbol{v} = \frac{C}{r_{min}} \cdot \boldsymbol{E_\varphi}$$

d) Valor máximo de $\dot{r}$. El máximo valor de $\dot{r}$ se da en la posición en la que el potencial ficticio es mínimo. Derivando para obtener esa posición r_*:

$$\frac{dV_f}{dr} = -\frac{MC^2}{r^3} + \frac{k}{r^2} = 0$$

$$r_* = \frac{MC^2}{k}$$

Sustituyendo en el potencial ficticio:

$$V_f = \frac{MC^2}{2r_*^2} - \frac{k}{r_*} = -\frac{k^2}{2MC^2}$$

Despejando:

$$\dot{r}^2_{max} = \frac{2E}{M} + \frac{k^2}{M^2C^2}$$

e) Posición para la que podría darse un movimiento estacionario si las condiciones iniciales hubieran sido las adecuadas. La órbita estacionaria puede ocurrir en la posición en la que el potencial es mínimo, siempre y cuando las condiciones iniciales sean tales que la energía coincida con el valor del potencial ficticio mínimo. Por lo tanto, la posición que se pide es la calculada en el apartado anterior:

$$r_* = \frac{MC^2}{k}$$

Teoría.

1. **Defina los enlaces UNILATERALES y BILATERALES, la principal diferencia entre ellos y ponga un ejemplo de cada tipo.**

   Un enlace BILATERAL es un enlace en el que la ecuación de enlace es una ECUACIÓN; un enlace UNILATERAL es aquel en el que la ecuación de enlace es una INECUACIÓN.

   La diferencia fundamental se encuentra en el sentido de la fuerza de enlace. En los enlaces bilaterales la fuerza puede adoptar cualquiera de los sentidos. En un enlace unilateral, en cambio, la fuerza solo puede llevar un determinado sentido prefijado. Es decir, en los enlaces bilaterales las fuerzas de enlace pueden ser positivas o negativas, según sea necesario para garantizar el equilibrio. En los enlaces unilaterales la fuerza de enlace solo puede ser positiva; en el momento en que la fuerza se hace nula se pierde el enlace.

   - Ejemplo enlace bilateral: deslizadera, articulación
   - Ejemplo enlace unilateral: apoyo simple, hilo

2. **En el equilibrio de un sistema material, ¿se anula la suma de las fuerzas interiores que actúan en cada una de las partículas? Razone su respuesta.**

   No, la suma de las fuerzas interiores en cada partícula no tiene por qué ser nula. Lo que debe ser nula es la suma de todas las fuerzas actuantes en cada partícula.

   Al sumar las fuerzas actuantes en todas las partículas sí ocurre que la suma de las fuerzas interiores de todas las partículas se anula. En un sistema material cualquiera las fuerzas interiores forman un SISTEMA NULO, ya que por su naturaleza se anulan dos a dos al sumarse y al tomar momentos en cualquier punto del espacio.

3. **Comente la siguiente afirmación: "Para que un sistema material cualquiera esté en equilibrio es condición necesaria y suficiente que el sistema de vectores formado por las fuerzas exteriores sea un sistema nulo". Razone su respuesta.**

   La afirmación es FALSA.

   Para que el sistema esté en equilibrio la condición es solo NECESARIA: es decir, estará en equilibrio si la suma de las fuerzas exteriores y el momento resultante de dichas fuerzas respecto de un punto son nulos (lo que se llama un sistema nulo).

   Pero no será condición SUFICIENTE: el que el sistema de vectores formado por las fuerzas exteriores sea nulo no siempre y en todos los tipos de sistemas garantizará que haya equilibrio. Esto solo es cierto en el caso de un sólido indeformable (o rígido).

   Por ejemplo, si tiramos de los dos extremos de una goma con fuerzas iguales y colineales, el sistema de fuerzas es nulo... pero la goma se deforma: los puntos materiales que la forman no están en equilibrio (existe un movimiento). Esto no ocurre si en vez de una goma aplicamos las fuerzas en los extremos de una barra.

4. **Si los vectores binormales en los puntos de una curva no cambian su dirección ¿qué se puede afirmar de la curva? Razone su respuesta.**

   De acuerdo con la segunda ley de Frenet, la derivada respecto de s del vector binormal tiene como módulo $(1/\tau)$ (τ = radio de curvatura de torsión). La curvatura de torsión $(1/\tau)$ indica la tendencia de la curva a salirse del plano osculador.

   Si los vectores unitarios binormales se mantienen constantes en dirección al recorrer la curva, entonces la derivada respecto de s será cero y la curvatura de torsión $(1/\tau)$ será también nula. O el radio de curvatura de torsión será infinito (que es decir lo mismo). Esto indica que la curva es PLANA.

5. **¿Es cierto que el vector unitario normal en un punto de una curva es un vector en el plano osculador, perpendicular al vector unitario tangente y con un sentido arbitrario? Razone su respuesta.**

   Efectivamente, el vector unitario normal se define como el vector, de módulo unidad, que, situado en el plano osculador, es perpendicular al unitario tangente. Su sentido, sin embargo, no es arbitrario: el vector unitario normal siempre está dirigido HACIA EL CENTRO DE CURVATURA DE LA CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ (circunferencia que comparte contacto de orden 2 con la curva en ese punto).

6. **Discuta si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y explique su respuesta: "La aceleración de un punto que describe una circunferencia con velocidad de módulo constante es nula".**

   La afirmación es FALSA.

   De acuerdo con el Teorema de Huygens, la aceleración de todo punto se puede descomponer en:

   - Tangencial: su módulo es la derivada del módulo de la velocidad respecto del tiempo (dv/dt) y es un vector siempre tangente a la trayectoria en cada punto (lleva la dirección del vector unitario tangente)
   - Normal: su módulo vale (v^2/ρ) y tiene la dirección del unitario normal (perpendicular a la trayectoria en cada punto, en el plano osculador). Está siempre orientada al centro de curvatura de la trayectoria en cada punto.

   Si la velocidad tiene módulo constante, entonces la aceleración tangencial sí será nula. Pero la aceleración normal existirá siempre en el caso de una circunferencia: el módulo será v^2/R y en cada punto será perpendicular a la velocidad y orientada hacia el centro de la circunferencia (R es el radio de la circunferencia).

   $a = a_n = v^2/R$, donde a_n indica la acelaración normal (hacia C en cada punto de la circunferencia). Por lo tanto, NO TENDRÁ ACELERACIÓN NULA.

7. **Si la velocidad y la aceleración de una partícula son siempre colineales, ¿es cierto que la trayectoria de la partícula es siempre una línea recta? Razone su respuesta.**

   La afirmación es CIERTA.

   La velocidad de la partícula siempre lleva la dirección del vector unitario tangente y, por lo tanto, siempre será tangente a la trayectoria en cada punto.

   La aceleración, sin embargo, tendrá una componente tangencial y otra normal (de acuerdo con el teorema de Huygens). La aceleración tangencial lleva también la dirección del vector unitario tangente y es, por lo tanto, paralela a la velocidad en cada instante. La aceleración normal, sin embargo, lleva la dirección del vector unitario normal: perpendicular a la velocidad en cada punto de la trayectoria (sobre el plano osculador). En una trayectoria general, la aceleración es la suma de los dos términos y, por lo tanto, no será colineal con la velocidad.

Para que sea colineal con la velocidad la aceleración normal debe ser nula a lo largo de la trayectoria. Ello implica que el radio de curvatura sea infinito (ya que el módulo de la aceleración normal es v^2/ρ). Y por lo tanto la trayectoria será UNA LÍNEA RECTA.

Sólo entonces velocidad y aceleración llevarán la misma dirección y serán colineales con la línea recta.

8. **Comente la siguiente afirmación: "Si en la dinámica de la partícula hay rozamiento, no se cumple el teorema de la energía".**

La afirmación es FALSA.

El Teorema de la Energía es totalmente general, se cumple siempre, independientemente de la naturaleza de las fuerzas que actúen sobre las partículas. Siempre será cierto que $dW_{act} = dT$: el trabajo de las fuerzas actuantes se invierte en modificar la energía cinética de la partícula.

Lo que no se cumplirá es que la energía se conserva; es decir, no se podrá aplicar la ecuación de conservación de la energía.

9. **¿Es posible que la trayectoria de una partícula, sometida a un campo Newtoniano de fuerzas de tipo repulsivo, sea una curva cerrada? Razone su respuesta.**

Si la fuerza central es repulsiva, entonces es de la forma: $\boldsymbol{F} = k/r^2 \cdot \boldsymbol{E_r}$. El potencial de la fuerza será positivo también: $V(r) = k/r$.

Al llevarlo a la ecuación de la energía y hallar el potencial ficticio, éste resultará será: $V_f(r) = \frac{M \cdot C^2}{2 \cdot r^2} + \frac{k}{r}$ (potencial positivo siempre).

Es decir, se trata de una curva que tiene como asíntotas los ejes de ordenadas y abscisas y no tiene ningún mínimo. Para cualquier nivel de energía sólo existirá un punto absidal, intersección entre la energía y el potencial ficticio. Además, como para que haya movimiento posible $E > V_f(r)$, el movimiento se producirá siempre hacia valores de r mayores al punto absidal. El punto se alejará de O sin trazar en ningún momento una curva cerrada.

No, la trayectoria no será una curva cerrada.

10. **Explique brevemente qué son las Ecuaciones Diferenciales del Movimiento de una partícula.**

Las Ecuaciones Diferenciales del movimiento son aquellas ecuaciones que nos permiten conocer (una vez integradas) la dependencia temporal de las variables que definen la posición de la partícula. Surgen de aplicar los teoremas de la dinámica, que relacionan el movimiento con las fuerzas actuantes sobre la partícula.

La posición de la partícula se define mediante unas variables o coordenadas ((x, y, z) en cartesianas o (r, φ, z) en polares, por ejemplo) que son función del tiempo. Las leyes temporales no las conocemos y es lo que se quiere determinar a partir de los teoremas y ecuaciones de la dinámica, que relacionan fuerzas y movimiento.

Resueltos los teoremas y ecuaciones de la dinámica se llega a unas ecuaciones en derivadas (de ahí el nombre de diferenciales), ecuaciones que incluyen las variables y sus derivadas. La integración de dichas ecuaciones (necesitamos tantas como variables del sistema) permitiría conocer cómo varían las variables en el tiempo y, por lo tanto, cuál es la posición de la partícula en cada instante, bajo la acción de las fuerzas aplicadas.